

Wednesday, 16 July 2025

Problem 4. A *proper divisor* of a positive integer N is a positive divisor of N other than N itself. The infinite sequence $a_1, a_2, \dots$ consists of positive integers, each of which has at least three proper divisors. For each $n \geq 1$, the integer a_{n+1} is the sum of the three largest proper divisors of a_n . Determine all possible values of a_1 .

Problem 5. Alice and Bazza are playing the *inekoalaty game*, a two-player game whose rules depend on a positive real number λ which is known to both players. On the n^{th} turn of the game (starting with $n = 1$) the following happens:

- If n is odd, Alice chooses a nonnegative real number x_n such that

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n.$$

- If n is even, Bazza chooses a nonnegative real number x_n such that

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n.$$

If a player cannot choose a suitable number x_n , the game ends and the other player wins. If the game goes on forever, neither player wins. All chosen numbers are known to both players.

Determine all values of λ for which Alice has a winning strategy and all those for which Bazza has a winning strategy.

Problem 6. Consider a 2025×2025 grid of unit squares. Matilda wishes to place on the grid some rectangular tiles, possibly of different sizes, such that each side of every tile lies on a grid line and every unit square is covered by at most one tile.

Determine the minimum number of tiles Matilda needs to place so that each row and each column of the grid has exactly one unit square that is not covered by any tile.

Thứ Tư, ngày 16 tháng 7 năm 2025

Bài 4. Một ước số thực sự của số nguyên dương N là một ước nguyên dương khác N của N .

Cho $a_1, a_2, \dots$ là một dãy vô hạn số nguyên dương sao cho mỗi số hạng có ít nhất ba ước số thực sự. Biết rằng với mọi $n \geq 1$, số hạng a_{n+1} bằng tổng của ba ước số thực sự lớn nhất của a_n .

Xác định tất cả các giá trị có thể của a_1 .

Bài 5. Alice và Bazza chơi trò chơi *Ưc*, một trò chơi hai người mà luật chơi phụ thuộc vào một số thực dương λ mà cả hai người đều biết. Tại lượt thứ n của trò chơi (bắt đầu với $n = 1$), điều sau đây diễn ra:

- Nếu n là số lẻ, Alice chọn một số thực không âm x_n sao cho

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n.$$

- Nếu n là số chẵn, Bazza chọn một số thực không âm x_n sao cho

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n.$$

Nếu một người không thể chọn được một số x_n hợp lệ thì trò chơi kết thúc và người kia thắng cuộc. Nếu trò chơi kéo dài vô hạn thì không người nào thắng cuộc. Cả hai người đều biết tất cả các số đã được chọn.

Xác định tất cả các giá trị của λ sao cho Alice có chiến lược thắng cuộc và tất cả các giá trị của λ sao cho Bazza có chiến lược thắng cuộc.

Bài 6. Cho một bảng ô vuông kích thước 2025×2025 . Matilda muốn đặt lên bảng một số viên gạch hình chữ nhật, kích thước có thể khác nhau, sao cho mỗi viên phủ kín một số ô vuông đơn vị của bảng và mỗi ô vuông đơn vị được phủ bởi không quá một viên.

Xác định số nhỏ nhất các viên gạch mà Matilda cần đặt sao cho trên mỗi hàng cũng như trên mỗi cột của bảng có đúng một ô vuông đơn vị không được phủ bởi các viên gạch.